PART2 極限値と微分係数

要点① 極限値

関数 $f(x)$ において，x が a 以外の値をとりながら，限りなく a に近づくとき，$f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づく場合，この値 α を，x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の「　　　」といい，次のように表す。

$f(x)$　α　　または　　x　　a のとき $f(x)$　　α

例 $\lim_{x\to 2}(x+1)=$

要点② 微分係数

関数 $f(x)$ の $x=a$ から $x=b$ までの平均変化率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ …… ①　において，a の値を「固定」し，b を a に限りなく近づけるとき，①がある一定の値に限りなく近づくならば，その極限値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における「　　　　」(または変化率)といい，「　　　」で表す。

つまり

$$f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \cdots\cdots ②$$

である。

②において，$b-a=h$ とおくと，$b=a+h$ となる。また，$b\to a$ のとき，$h\to 0$ である。したがって，微分係数②は次のように表される。

微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

例 関数 $f(x)=x^2$ の $x=1$ における微分係数は

$$f'(\ \ )=\lim_{h\to 0}\frac{f(\ \ +h)-f(\ \ )}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}$$

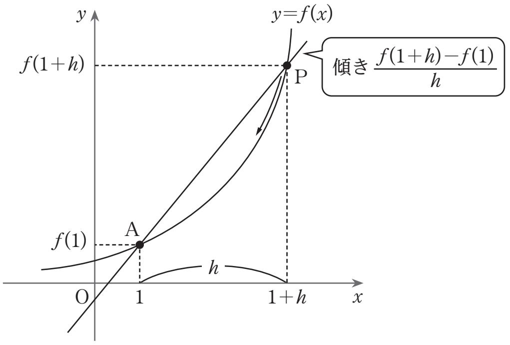
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=$$

要点③ 微分係数の図形的な意味

関数 $y=f(x)$ のグラフ上に2点 A$(1,\ f(1))$，P$(1+h,\ f(1+h))$ をとると，直線APの傾き

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

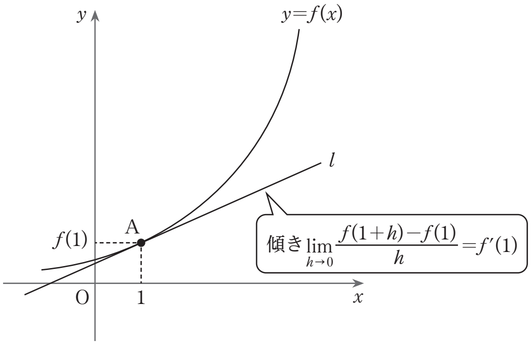
は，関数 $f(x)$ において x が1から $1+h$ まで変化するときの平均変化率に等しい。



ここで，h を0に限りなく近づけると，点Pは点Aに限りなく近づく。このとき，直線APの傾きは

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

すなわち，微分係数 $f'(1)$ に限りなく近づき，直線APは，点Aを通り傾きが $f'(1)$ の直線 l に限りなく近づく。この直線 l を，曲線 $y=f(x)$ 上の点Aにおける「　　」といい，点Aを「　　」という。



曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きについて，次のことが成り立つ。

接線の傾きと微分係数

曲線 $y=f(x)$ 上の点 A$(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，微分係数 $f'(a)$ で表される。

2 (1) 次の極限値を求めよ。

(i) $\lim_{x\to 0}(4+x)$ (ii) $\lim_{h\to 0}\dfrac{h^2-5h}{h}$

(2) 関数 $f(x)=-2x^2$ の $x=-1$ における微分係数を求めよ。

(3) 曲線 $y=x^2+1$ 上の点 $(2,\ 5)$ における接線の傾きを求めよ。

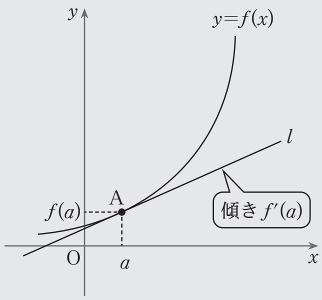
Point Pickup

極限値

極限値 $\lim_{x\to a}f(x)$ は，$f(x)$ を $x=a$ が代入できる形に変形し，$x=a$ を代入して求める。
求めた極限値は，$f(x)$ が「限りなく近づく値」である。

微分係数と接線の傾き

微分係数 $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は，
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線 l の傾きに等しい。



第 16 講　PART2 確認問題

1 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to 0}(2x+5)= \boxed{\text{ア}}$$

2 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{h \to 0}\frac{h^2+3h}{h}= \boxed{\text{イ}}$$

3 関数 $f(x)=x^2$ の $x=3$ における微分係数は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

4 曲線 $y=3x^2-1$ 上の点 $(1,\ 2)$ における接線の傾きは

$\boxed{\text{エ}}$ である。

PART2 極限値と微分係数

2 (1) 次の極限値を求めよ。

(i) $\lim_{x \to 0}(4+x)$　　(ii) $\lim_{h \to 0}\frac{h^2-5h}{h}$

(2) 関数 $f(x)=-2x^2$ の $x=-1$ における微分係数を求めよ。

(3) 曲線 $y=x^2+1$ 上の点 $(2,\ 5)$ における接線の傾きを求めよ。

[解答]

(1) (i) $\lim_{x \to 0}(4+x)=4$

(ii) $\lim_{h \to 0}\frac{h^2-5h}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{h(h-5)}{h}=\lim_{h \to 0}(h-5)=-5$

(2) $$f'(-1)=\lim_{h \to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{-2(-1+h)^2-(-2)\cdot(-1)^2}{h}$$

$$=\lim_{h \to 0}\frac{-2(1-2h+h^2)+2}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{4h-2h^2}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{h(4-2h)}{h}$$

$$=\lim_{h \to 0}(4-2h)=4$$

(3) $f(x)=x^2+1$ とおくと，曲線 $y=x^2+1$ 上の点 $(2,\ 5)$ における接線の傾きは $f'(2)$ であるから

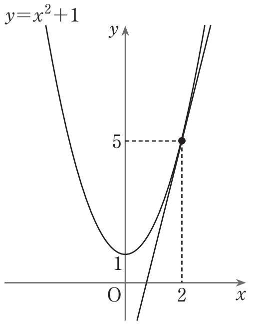
$$f'(2)=\lim_{h \to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h \to 0}\frac{\{(2+h)^2+1\}-(2^2+1)}{h}$$

$$=\lim_{h \to 0}\frac{(4+4h+h^2+1)-(4+1)}{h}$$

$$=\lim_{h \to 0}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{h(4+h)}{h}$$

$$=\lim_{h \to 0}(4+h)=4$$



第16講 PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：5

[解説]

$$\lim_{x\to 0}(2x+5)=5$$ [A]

[A]　極限値
関数 $f(x)$ において，x が a 以外の値をとりながら，限りなく a に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づく場合，この値 α を，x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の「極限値」という。
$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ または
$x\to a$ のとき $f(x)\to\alpha$

2

[正解] イ：3

[解説]

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(h+3)$$ [B]
$$=3$$

[B]　極限値
関数 $f(x)$ において，x が a 以外の値をとりながら，限りなく a に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づく場合，この値 α を，x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の「極限値」という。
$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ または
$x\to a$ のとき $f(x)\to\alpha$

3 **[正解]** ウ：6

[解説]

関数 $f(x)=x^2$ の $x=3$ における微分係数は

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$ [C]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(6+h)$$

$$=6$$

[C]　微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

4 **[正解]** エ：6

[解説]

$f(x)=3x^2-1$ とおくと，曲線 $y=3x^2-1$ 上の点 $(1,\ 2)$ における接線の傾きは $f'(1)$ であるから [D]

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$ [E]

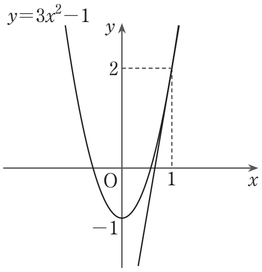
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{3(1+h)^2-1\}-(3\cdot 1^2-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6h+3h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(6+3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(6+3h)$$

$$=6$$



[D]　微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きに等しい。

[E]　微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$